

Bab 3:
Dasar-dasar Simulasi



PEMODELAN DAN SIMULASI SISTEM

Sumber: Harrell, C., B.K. Ghosh and R.O. Bowden, Jr., *Simulation Using Promodel*, 2nd ed., McGraw-Hill, Singapore, 2003.

Bab 3: Dasar-dasar Simulasi

2

Bacaan

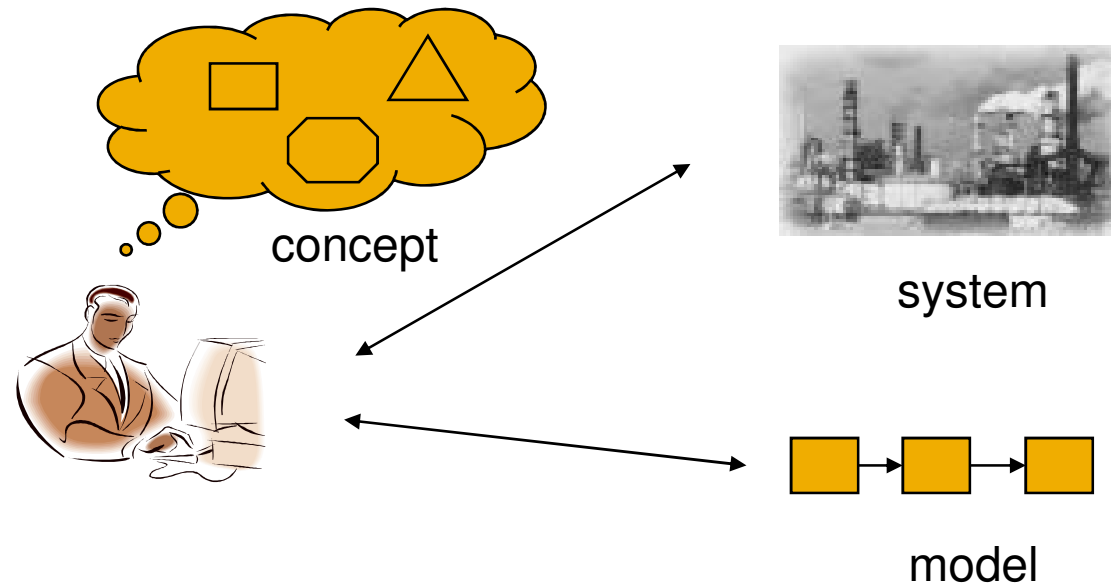
- Harrell, Ch 3

Topik

- Tipe simulasi
- Perilaku acak
- Melakukan simulasi perilaku acak (*Simulating Random Behavior*)
- Simulasi *Spreadsheet* sederhana

1. Pendahuluan

3



- Simulasi akan lebih bermanfaat bila kita mengetahui apa yang sesungguhnya terjadi
- Memahami cara kerja simulasi membantu kita untuk menerapkannya dengan benar dan memahami output yang dihasilkannya

2. Tipe Simulasi



Tipe simulasi

5

- Statis atau dinamis
- Stokastik atau deterministik
- Event-diskrit atau kontinu
(*Discrete event or continuous*)

Simulasi statik vs. dinamik

6

Simulasi statik:

- Simulasi yang TIDAK didasarkan oleh waktu
- Mencakup sample acak yang diambil untuk membangkitkan sebuah hasil statistik → simulasi Monte Carlo
- Contoh: memilih portofolio untuk saham

Simulasi dinamik

- Mencakup lintasan waktu
- Sebuah mekanisme waktu (*clock mechanism*) menggerakkan waktu, sehingga variabel status berubah saat waktu berubah
- Contoh: sistem manufaktur dan jasa

Simulasi stokastik/probabilistik vs. deterministik

7

Simulasi stokastik:

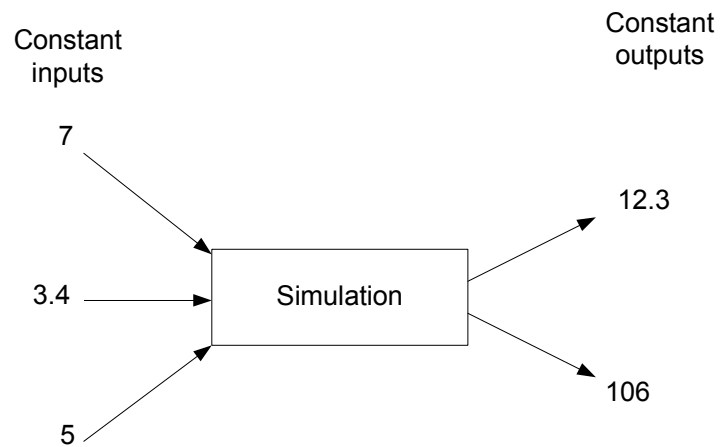
- Satu atau lebih variabel input merupakan variabel acak
- Menghasilkan output yang acak dengan sendirinya (*self random*)
- Memberikan hanya satu titik data untuk mengetahui bagaimana sistem berperilaku → setiap percobaan bervariasi secara statistik

Simulasi deterministik

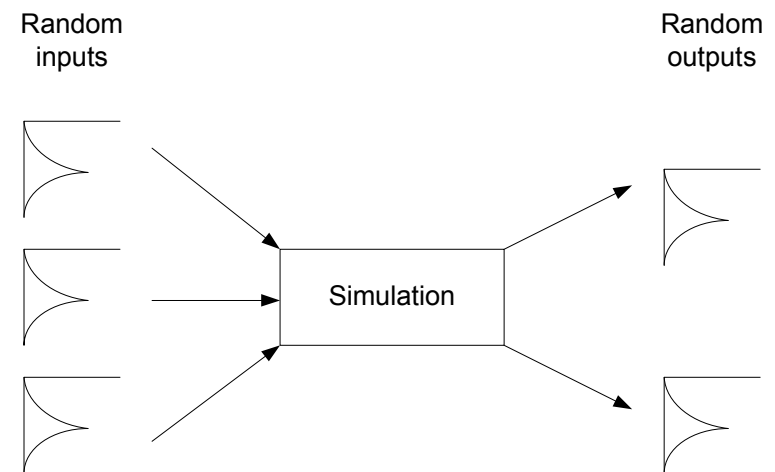
- Tidak memiliki komponen input yang bersifat acak
- Tidak memiliki keacakan (*randomness*)
- Seluruh status yang akan datang dapat ditentukan setelah data input dan status awal (*initial state*) didefinisikan

Simulasi stokastik/probabilistik vs. deterministik

8



(a)



(b)

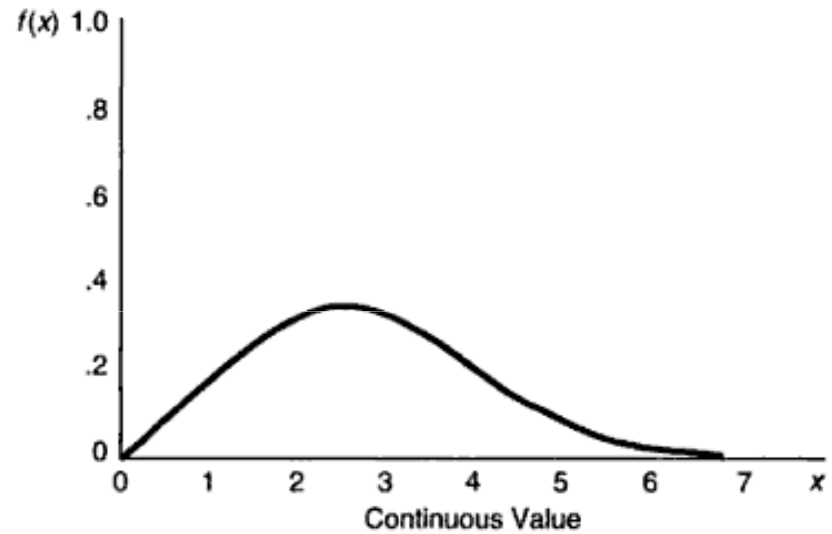
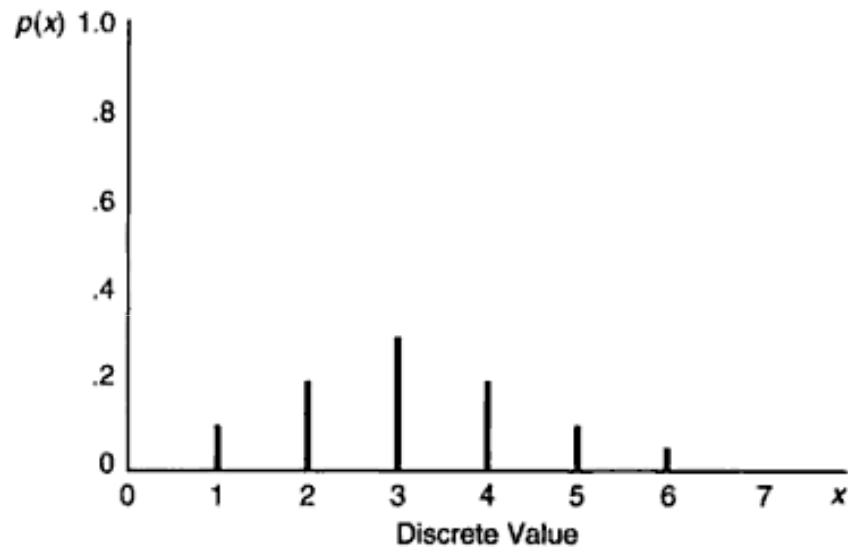
Examples of (a) a deterministic simulation and (b) a stochastic simulation

3. Perilaku Acak (*Random Behavior*)



Distribusi diskrit vs. kontinu

10



Distribusi diskrit vs. kontinu

11

Diskrit

- Sejumlah nilai yang mungkin (*a countable number of possible values*)
- Contoh: jumlah *item* dalam satu *lot*, jumlah individu dalam sekelompok orang

Kontinu

- Sebuah kontinum dari nilai
- Contoh: sebuah mesin dengan waktu siklus yang terdistribusi seragam (*uniform*) antar 1.2 – 1.8 menit

Random variate

12

- Sistem stokastik seringkali memiliki waktu atau kuantitas nilai yang bervariasi dalam sebuah jangkauan (*range*) dan berdasarkan densitas tertentu, sebagaimana didefinisikan oleh distribusi probabilitas
- Nilai yang dihasilkan dari sebuah distribusi disebut ***random variate***

4. Simulasi Perilaku Acak *(Simulating Random Behavior)*



Bagaimana membangkitkan bilangan acak?

14

- Perilaku acak (*random behavior*) ditiru oleh simulasi dengan menggunakan pembangkit bilangan acak (*random number generator*)
- Bilangan-bilangan yang dihasilkan oleh pembangkit bilangan acak tidak “acak” dalam arti yang sebenarnya. Contohnya pembangkit bilangan acak pseudo, yang terus menerus menghasilkan urutan bilangan yang sama

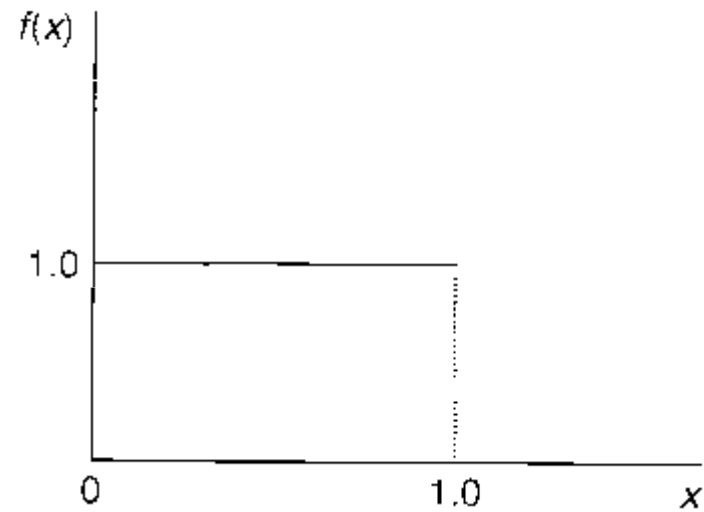
Bagaimana cara membangkitkan bilangan acak?

15

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\text{Mean} = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\text{Variance} = \sigma^2 = \frac{1}{12}$$



Distribusi (0,1) adalah pembangkit bilangan acak

Linear Congruential Generators (LCG)

16

Metoda:

Sebuah urutan bilangan integer Z_1, Z_2, Z_3, \dots
didefinisikan dengan formula rekursif sbb:

$$Z_i = (aZ_{i-1} + c) \text{ mod } (m)$$

a : multiplier

c : increment

m: modulus

LCG: contoh

17

- $a=21$, $c=3$, $m=16$ untuk menghasilkan angka acak – pseudo (*pseudo-random numbers*)
- $Z_i = (aZ_{i-1} + c) \bmod(m) \rightarrow Z_i = (21Z_{i-1} + 3) \bmod(16)$
- $Z_0 = 13$ (Pilih angka antara 0 dan 15 ($m-1$)) \rightarrow *seed value, starting value*
- $Z_1 = (21Z_0 + 3) \bmod(16) = (21(13)+3) \bmod(16) = 276 \bmod(16) = 4$
- $U_i = Z_i/16 = 4/16 = 0.2500$

LCG: contoh

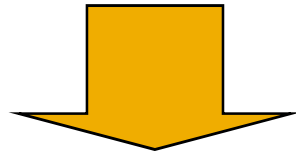
TABLE 3.1 Example LCG $Z_i = (21Z_{i-1} + 3) \bmod(16)$,
with $Z_0 = 13$

i	$21Z_{i-1} + 3$	Z_i	$U_i = Z_i/16$
0		13	
1	276	4	0.2500
2	87	7	0.4375
3	150	6	0.3750
4	129	1	0.0625
5	24	8	0.5000
6	171	11	0.6875
7	234	10	0.6250
8	213	5	0.3125
9	108	12	0.7500
10	255	15	0.9375
11	318	14	0.8750
12	297	9	0.5625
13	192	0	0.0000
14	3	3	0.1875
15	66	2	0.1250
16	45	13	0.8125
17	276	4	0.2500
18	87	7	0.4375
19	150	6	0.3750
20	129	1	0.0625

LCG: contoh

19

Kita melakukan lima replikasi dari sebuah simulasi. Untuk menjalankan model simulasi, satu replikasi memerlukan 1000 kali penggunaan pembangkit bilangan acak selama simulasi dilakukan.



Kita memerlukan sebuah pembangkit bilangan acak dengan panjang siklus (*cycle length*) sedikitnya 5000

LCG (lanjutan)

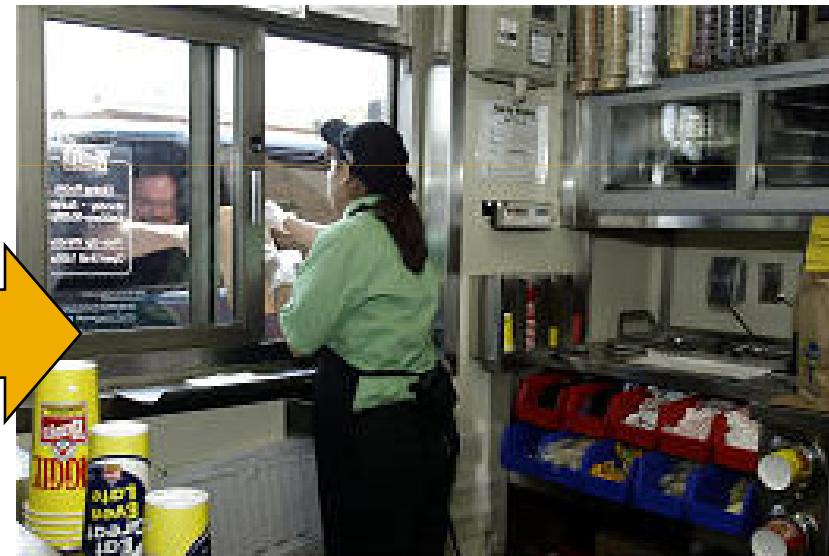
20

Panduan untuk memilih a , c dan m untuk mewujudkan **panjang siklus maksimum (*maximum cycle length*)** :

- $m = 2^b$, dimana b ditentukan berdasarkan jumlah *bit* per kata dalam komputer yang digunakan. Sebagian komputer menggunakan 32 bit per kata, sehingga angka 31 merupakan pilihan yang baik untuk b
- c dan m sedemikian sehingga faktor persekutuan terbesar (*greatest common factor*) adalah 1 (integer positif satu-satunya yang membagi m dan c adalah 1)
- $a = 1 + 4k$, dimana k adalah bilangan integer
- Panjang siklus maksimum yang dapat dicapai sebuah LCG adalah m
- LCG dapat mencapai panjang siklus penuh lebih dari 2.1 milyar (2^{31}) bilangan acak

Contoh

21



Contoh

22

Simulasi kejadian “acak” (*“random” events*) dalam sebuah restoran *drive-through*

- Waktu tiba mobil di jendela restoran *drive-through*
- Waktu yang diperlukan pengemudi untuk memesan
- Jumlah *hamburger*, minuman, dan kentang yang diorder
- Waktu yang diperlukan oleh restoran untuk menyiapkan pesanan

Stream

23

- Panjang rentetan bilangan acak dapat dibagi-bagi dalam segmen yang lebih kecil, yang disebut aliran/***stream***.
- Contoh: *stream 1*: pola kedatangan mobil ke jendela restoran *drive-through*; *stream 2*: waktu yang diperlukan oleh pengemudi untuk memesan

LCG: bagaimana penerapannya

24

- Memutuskan berapa banyak bilangan acak yang ditempatkan dalam masing-masing *stream*
- Bagilah urutan pembangkit dari bilangan acak dalam beberapa *stream*
- Bangkitkan keseluruhan urutan bilangan acak (*cycle length*)
- Catat nilai Z_i yang menandai permulaan masing-masing *stream*
- Masing-masing *stream* memiliki nilai awal sendiri atau yang disebut sebagai *seed value*

LCG (lanjutan)

25

Dua tipe LCG:

- *Mixed congruential generators: $c > 0$*
- *Multiplicative congruential generators $c = 0$*
 - Lebih efisien dari *mixed generator* → tidak memerlukan penambahan c

Promodel menggunakan *multiplicative generator*

$$Z_i = (630,360,016Z_{i-1}) \bmod (2^{31}-1)$$

Menguji Pembangkit Bilangan Acak

26

Bilangan yang dihasilkan dari pembangkit bilangan acak harus:

- Independen
- Terdistribusi uniform antara nol dan satu

Uniform (0,1)

Menguji Pembangkit Bilangan Acak

27

Hasilkan suatu urutan bilangan acak U_1, U_2, U_3, \dots

Hipotesis untuk menguji **independensi**:

H_0 : nilai U_i dari generator independen

H_1 : nilai U_i dari generator tidak independen

→ Uji dijalankan

Hipotesis untuk menguji keseragaman (**uniformity**):

H_0 : nilai U_i seragam(0,1)

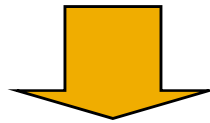
H_1 : nilai U_i tidak seragam (0,1)

→ Uji Kolmogorov-Smirnov, uji chi-square

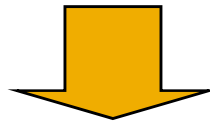
Bagaimana cara membangkitkan *random variate*?

28

Bagaimana cara membangkitkan pengamatan/observasi (*random variates*) dari distribusi selain distribusi uniform (0,1) ?



Transformasikan observasi yang dihasilkan dari pembangkit bilangan acak ke distribusi yang diinginkan

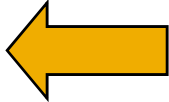


Nilai yang ditransformasikan \rightarrow *variate* dari distribusi yang dimaksud

Bagaimana cara membangkitkan *random variate*?

29

Tipe metoda untuk membangkitkan *random variate* dari distribusi yang diinginkan

- ***Inverse transformation method*** 
- *The acceptance/rejection method*
- *The composition method*
- *The convolution method*
- *Methods employing special properties*

Bagaimana cara membangkitkan *random variate*?

30

Distribusi Kontinu:

- Misalkan sebuah fungsi densitas probabilitas adalah $f(x)$
- Cari fungsi distribusi kumulatif dari $X \rightarrow F(x) = P(X \leq x)$
- $U = F(x)$, dimana U adalah uniform $(0,1)$
- Hitung untuk $x \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(U) \rightarrow$ transformasikan U ke nilai untuk x yang sesuai dengan distribusi yang ditentukan $f(x)$
- Tidak mungkin menyelesaikan persamaan sederhana untuk membangkitkan variabel yang terdistribusi normal

Bagaimana cara membangkitkan *random variate*?

31

Distribusi kontinu

Contoh: waktu antar kedatangan mobil ke jendela restoran *drive-through* terdistribusi eksponensial, waktu yang dibutuhkan oleh pengemudi untuk memesan makanan mengikuti distribusi lognormal

As an example, suppose that we need to generate variates from the exponential distribution with mean β . The probability density function $f(x)$ and corresponding cumulative distribution function $F(x)$ are

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Bagaimana cara membangkitkan *random variate*?

32

Distribusi Kontinu

Setting $U = F(x)$ and solving for x yields

$$U = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$e^{-x/\beta} = 1 - U$$

$$\ln(e^{-x/\beta}) = \ln(1 - U) \quad \text{where } \ln \text{ is the natural logarithm}$$

$$-x/\beta = \ln(1 - U)$$

$$x = -\beta \ln(1 - U)$$

5. Simulasi *Spreadsheet* Sederhana



Contoh: Model simulasi dinamik, stokastik

34



Contoh: Model simulasi dinamik, stokastik

35

Pelanggan tiba menggunakan mesin ATM dengan waktu interval rata-rata 3.0 menit yang terdistribusi eksponensial.

Ketika pelanggan datang ke sistem, mereka bergabung dalam antrian untuk menunggu giliran menggunakan ATM. Antrian memiliki kapasitas tak terbatas untuk menampung pelanggan.

Pelanggan menghabiskan rata-rata 2.4 menit terdistribusi eksponensial pada mesin ATM untuk menyelesaikan transaksinya, yang disebut waktu jasa (*service time*) pada ATM

Contoh: Model simulasi dinamik, stokastik

36

Simulasikan sistem kedatangan dan pemrosesan 25 pelanggan, dan estimasikan/perkirakan:

- waktu tunggu yang diharapkan (*expected waiting time*) pelanggan di dalam antrian (waktu rata-rata pelanggan menunggu di dalam antrian untuk menggunakan ATM)
- Waktu yang diharapkan dalam sistem / *expected time in the system* (waktu rata-rata pelanggan menunggu dalam antrian ditambah dengan waktu rata-rata yang diperlukan untuk menyelesaikan transaksinya di ATM)

Contoh: Model simulasi dinamik, stokastik

37

- Sistem: ATM
- Entitas/*Entity*: pelanggan yang tiba di ATM untuk melakukan transaksi
- *Resource*: ATM yang melayani pelanggan dengan kapasitas untuk melayani satu pelanggan pada satu waktu
- Kontrol sistem yang mengatur bagaimana, kapan, dan dimana aktivitas dilakukan untuk ATM ini

Contoh: Model simulasi dinamik, stokastik

38

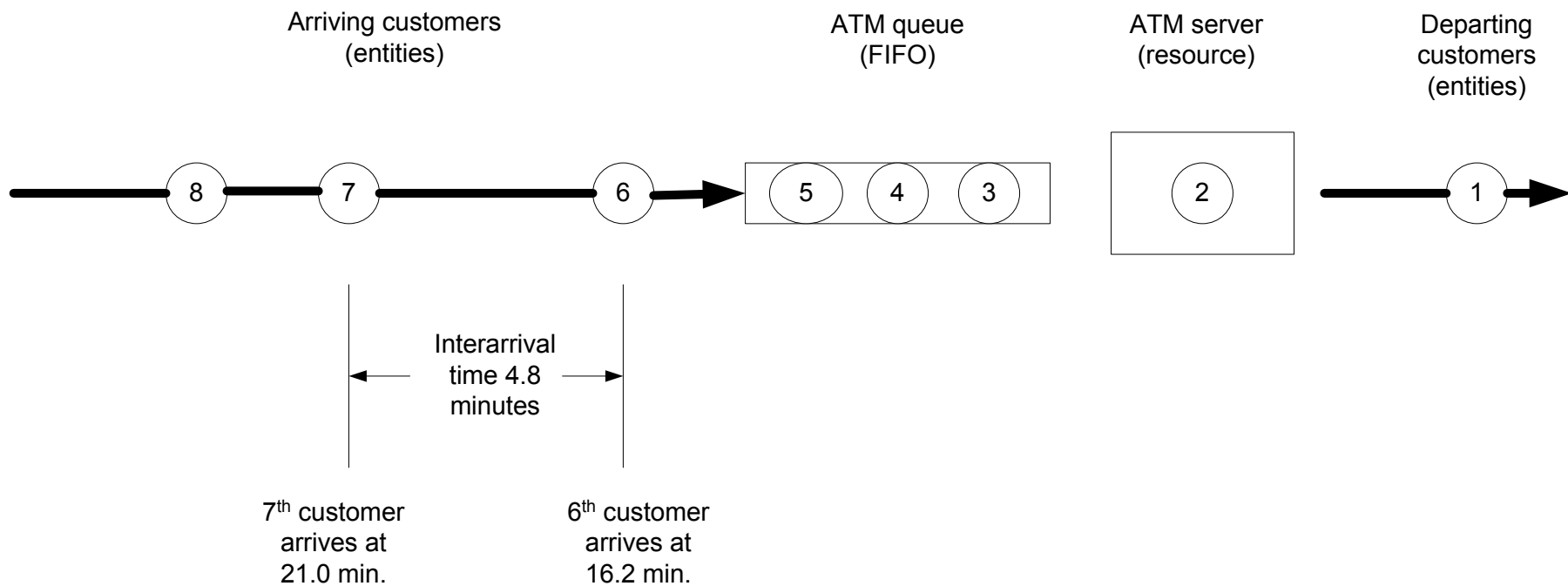


Figure: Descriptive drawing of the ATM system

TABLE 3.2 Spreadsheet Simulation of Automatic Teller Machine (ATM)

Arrivals to ATM			ATM Processing Time			ATM Simulation Logic						
Stream 1 (Z1 _i)	Random Number (U1 _i)	Interarrival Time (X1 _i)	Stream 2 (Z2 _i)	Random Number (U2 _i)	Service Time (X2 _i)	Customer Number (1)	Arrival Time (2)	Begin Service Time (3)	Service Time (4)	Departure Time (5) = (3) + (4)	Time in Queue (6) = (3) - (2)	Time in System (7) = (5) - (2)
0	3		122									
1	66	0.516	5	0.039	0.10	1	2.18	2.18	0.10	2.28	0.00	0.10
2	109	0.852	108	0.844	4.46	2	7.91	7.91	4.46	12.37	0.00	4.46
3	116	0.906	95	0.742	3.25	3	15.00	15.00	3.25	18.25	0.00	3.25
4	7	0.055	78	0.609	2.25	4	15.17	18.25	2.25	20.50	3.08	5.33
5	22	0.172	105	0.820	4.12	5	15.74	20.50	4.12	24.62	4.76	8.88
6	81	0.633	32	0.250	0.69	6	18.75	24.62	0.69	25.31	5.87	6.56
7	40	0.313	35	0.273	0.77	7	19.88	25.31	0.77	26.08	5.43	6.20
8	75	0.586	98	0.766	3.49	8	22.53	26.08	3.49	29.57	3.55	7.04
9	42	0.328	13	0.102	0.26	9	23.72	29.57	0.26	29.83	5.85	6.11
10	117	0.914	20	0.156	0.41	10	31.08	31.08	0.41	31.49	0.00	0.41
11	28	0.219	39	0.305	0.87	11	31.82	31.82	0.87	32.69	0.00	0.87
12	79	0.617	54	0.422	1.32	12	34.70	34.70	1.32	36.02	0.00	1.32
13	126	0.984	113	0.883	5.15	13	47.11	47.11	5.15	52.26	0.00	5.15
14	89	0.695	72	0.563	1.99	14	50.67	52.26	1.99	54.25	1.59	3.58
15	80	0.625	107	0.836	4.34	15	53.61	54.25	4.34	58.59	0.64	4.98
16	19	0.148	74	0.578	2.07	16	54.09	58.59	2.07	60.66	4.50	6.57
17	18	0.141	21	0.164	0.43	17	54.55	60.66	0.43	61.09	6.11	6.54
18	125	0.977	60	0.469	1.52	18	65.87	65.87	1.52	67.39	0.00	1.52
19	68	0.531	111	0.867	4.84	19	68.14	68.14	4.84	72.98	0.00	4.84
20	23	0.180	30	0.234	0.64	20	68.74	72.98	0.64	73.62	4.24	4.88
21	102	0.797	121	0.945	6.96	21	73.52	73.62	6.96	80.58	0.10	7.06
22	97	0.758	112	0.875	4.99	22	77.78	80.58	4.99	85.57	2.80	7.79
23	120	0.938	51	0.398	1.22	23	86.12	86.12	1.22	87.34	0.00	1.22
24	91	0.711	50	0.391	1.19	24	89.84	89.84	1.19	91.03	0.00	1.19
25	122	0.953	29	0.227	0.62	25	99.01	99.01	0.62	99.63	0.00	0.62
Average											1.94	4.26

Contoh: Model simulasi dinamik, stokastik

40

Replication	$Z1_0$	$Z2_0$
1	3	122
2	29	92

TABLE 3.3 Summary of ATM System Simulation Output

<i>Replication</i>	<i>Average Time in Queue</i>	<i>Average Time in System</i>
1	1.94 minutes	4.26 minutes
2	0.84 minutes	2.36 minutes
Average	1.39 minutes	3.31 minutes